Exercice 80 Distance d'un point à une droite. Voir pages 277 et 278.
Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ; $\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{j}$). Soit (d) la droite d'équation $2x + 3y - 6 = 0$.
Le but du problème est de déterminer les coordonnées du point H, pied de la perpendiculaire à (d) passant par le point O et d'en déduire la distance du point O à la droite (d).

Première méthode : Déterminer l'équation de la droite (Δ) perpendiculaire à (d) passant par O. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de (d) et de (Δ). En déduire la distance OH.

Deuxième méthode : Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur dont la direction est perpendiculaire à celle de (d). Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{n}$.
Démontrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{OH} = k\,\overrightarrow{n}$. Exprimer les coordonnées de H en fonction de k. Calculer k sachant que H est un point de (d). En déduire les coordonnées du point H puis la distance OH.

Troisième méthode : Soit A le point d'intersection de la droite (d) et de l'axe des ordonnées. Déterminer les coordonnées du point A. Déterminer une équation du cercle de diamètre [OA]. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la droite (d) et du cercle de diamètre [OA]. En déduire les coordonnées du point H et la distance OH.

Exercice 81 Calcul de sinus, cosinus et tangente de $\frac{\pi}{8}$. Voir page 303.

Soit ABCD un carré de côté 1et de centre O. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAO}$ coupe (OB) en E. Soit F le pied de la hauteur issue de E dans le triangle AEB. Démontrer que AO = AF et que FE = FB.
En déduire les longueurs des côtés du triangle AFE rectangle en F.

Déterminer alors la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$.

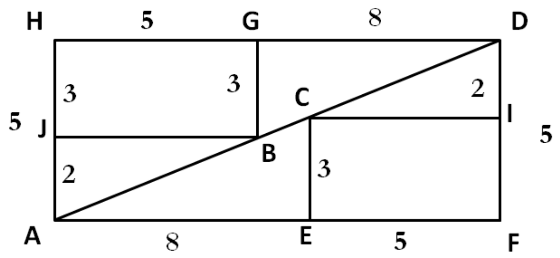
Exercice 82 Calcul de cosinus et de sinus $\frac{\pi}{12}$ Voir page 303.

Placer les points I, A et B repérés respectivement par les angles 0, $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique de centre O. Les tangentes en A et en B à ce cercle se coupent en C.
1/ Démontrer que OACB est un carré.
2/ Déterminer la mesure principale de l'angle $\widehat{IOC}$ puis les coordonnées du point C.
3/ En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et celle de $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 83 Dans un triangle quelconque Voir pages 183 et 219.
On considère un triangle ABC ayant trois angles aigus (acutangle) de côtés BC = a, CA = b et BA = c.
Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et I le milieu de [BC].
Que peut-on dire du triangle BOI ? Exprimer le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABC en fonction de la longueur a et d'un rapport trigonométrique de l'angle $\widehat{BAC}$.
Démontrer la relation $\dfrac{a}{\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{ABC}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{ACB}}$ (1)

On envisage le cas où l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.
On considère le point A', symétrique de A par rapport à O.
Démontrer qu'alors $\dfrac{a}{\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{a}{\sin\widehat{BA'C}}$.
En déduire que la, relation (1) est vraie dans un triangle quelconque.

Exercice 84 Le puzzle de Lewis Caroll Problème de synthèse

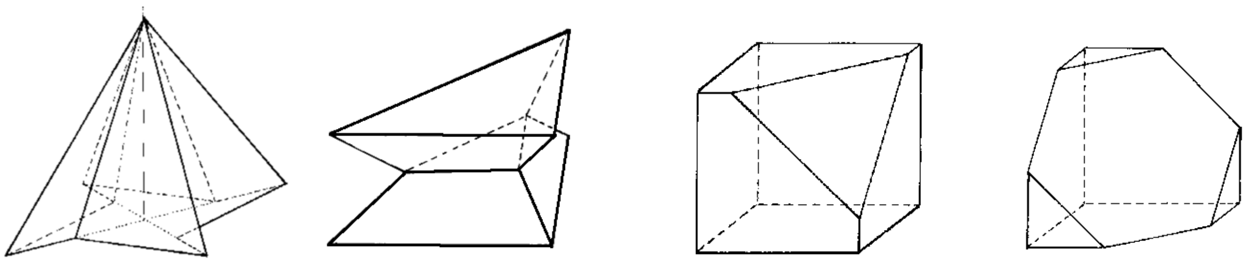


On se propose de démontrer que, contrairement aux apparences, les points A, B, C et D ne sont pas alignés.

Première partie, démonstrations par l'absurde
1/ Somme des aires.
Calculer l'aire du rectangle AFDH.
La comparer avec la somme des aires des triangles ACE, DBG et des trapèzes EFDC et GBAH.
Si les points A, B, C et D étaient alignés, quelle égalité devrait-on avoir ? Quelle conclusion peut-on en tirer ?
2/ Théorème de Pythagore et inégalité triangulaire.
Calculer AC, CD et AD. Si les points A, B, C et D étaient alignés, quelle égalité devrait-on avoir ?
Quelle conclusion peut-on en tirer ?
3/ Théorème de Thales.
Si les points A, B, C et D étaient alignés, quelles égalités de rapports pourrait-on écrire ?
Cette égalité est-elle vérifiée ? Quelle conclusion en tirer ?
4/ Utilisation des triangles semblables.
Soit I le pied de la perpendiculaire à (DF) passant par C.
Si les points A, C et D sont alignées alors les triangles AEC et CID sont semblables. Le sont-ils ?

Deuxième partie, démonstrations directes
5/ Trigonométrie dans le triangle rectangle.
Calculer tan $\widehat{FAB}$, tan $\widehat{FAC}$ et tan $\widehat{FAD}$.
Peut-on trouver trois points alignés parmi les points A, B, C et D ? Conclure.
6/ Approche analytique.
On se place dans le repère d'origine A dans lequel F(13 ; 0) et H(0 ; 5).
Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D.
Déterminer l'équation de la droite (AB), celle de la droite (CD), que peut-on en conclure ?
Déterminer l'équation des droites (AC) et (BD).
En déduire la nature du quadrilatère ACDB ?
7/ Autre approche analytique
Déterminer l'équation de (AD). Lire les coordonnées des points B et C sur la figure.
Les points C et B appartiennent-ils à la droite (AD) ?
8/ Approche vectorielle
Lire les coordonnées des points A, B, C et D sur la figure.
Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Comparer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, conclure.
9/ Utilisation de la notion de fonction.
Soit M un point de [AE], on pose AM = x.
La perpendiculaire en M à (AE) coupe [AC] en N et [HD] en P.
On appelle f la fonction qui à x associe MN et g la fonction qui à x associe PN.
Déterminer l'image de 5 par g. Déterminer l'antécédent de 3 par g.
Peut-on avoir simultanément HP = 5 et PN = 3. Conclure quant à a position de B par rapport à (AC).
10/ Calculer la distance qui sépare le point C de la droite (BD) puis la distance qui sépare le point A de la droite (CD). On pourra utiliser la relation qui est démontrée à la page 279.
11/ Retrouver ces résultats en calculant AC et AB et en utilisant les résultats de la question 1.
Comparer ces longueurs à la mesure de la largeur d'un trait de crayon.

Exercice 85 Construire les patrons des solides ci-dessous : Voir page 285.



Exercice 86 Prisme non droit. La réponse est à la page 284.

On considère le cube ABCDEFGH tel que le support de l'arête [AE] soit perpendiculaire en A à la face ABCD. Soit I le centre de la face ABCD et J le centre de la face EFGH. Soit K, L, M et N les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [GH] et [HE].

Les carrés IKBL et HNJM sont les faces contenues dans les plans parallèles du prisme IKBLHNJM.

Construire en vue de face le triangle JIB à l'échelle 1 en posant AB = 5 cm.

Dessiner ensuite le prisme IKBLHNJM vu du dessus (depuis un point situé sur [IJ] privé de [IJ]).

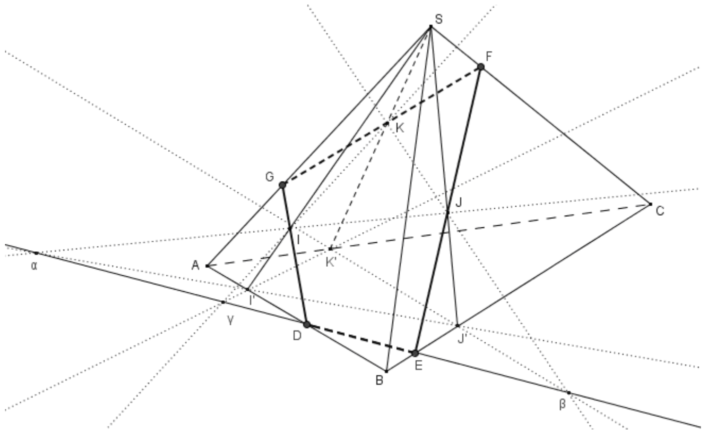
Construire le patron du prisme IKBLHNJM. Vérifier que sa hauteur est égale à 5 cm.

Exercice 87 Section d'un tétraèdre par un plan. Solution détaillée page 296.

Les points I, J et K sont donnés, chacun sur une face différente du tétraèdre SABC. I un point de la face [SAB], J un point de la face [SBC] et K un point de la face [SCA].

La construction de la section DEFG du tétraèdre SABC par le plan (IJK) est donnée ci-contre.

Rédiger le protocole de cette construction.



Exercice 88 Aire et volume d'un décaèdre Voir page 291.

Soit ABCDEFGH un cube de 10 cm d'arête. Soient I et J les centres des faces ABCD et EFGH. Par la rotation d'axe (IJ) et d'angle 45° le carré EFGH a pour image le carré PQRS. On obtient ainsi un décaèdre ABCDPQRS qui comporte deux faces parallèles carrées et huit faces latérales qui sont des triangles isocèles.

L'objectif du problème est de déterminer son volume et son aire.

On considère alors la pyramide régulière de sommet X dont est extrait le tronc de pyramide PQRSTUVW.

Calculer le rapport $\dfrac{SP}{WT}$.

Interpréter ce rapport en termes de coefficient de réduction.

Déterminer une relation entre le volume V de la pyramide TUVWX et le volume v de la pyramide PQRSX. En déduire le volume V_T du tronc de pyramide PQRSTUVW

Calculer le volume du tétraèdre ATBP.

En déduire le volume du *décaèdre* ABCDPQRS.

Calculer l'aire du triangle ABP, en déduire l'aire totale du décaèdre.