Exercice 68 Symétrie axiale Voir page 236.

Deux cercles (C) et (C') de même rayon et de centres respectifs O et O' se coupent en A et B.
Une droite Δ parallèle à (OO') coupe (C) en P et Q et (C') en R et S de telle sorte que les points P et R soient situés du même côté de (AB). Soit I le milieu de [SQ] et J le milieu de [PR]. On note s la symétrie d'axe (AB).
1/ Déterminer l'image de (C) par s et l'image de (PQ) par s.
2/ En déduire les images de P et Q par s.
3/ Déterminer la nature du triangle BIJ.

Exercice 69 Symétrie centrale Voir page 233.

Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Une droite Δ passant par O, et non parallèle à la droite (AB) coupe (BC) en E et (AD) en G. On appelle Δ' la perpendiculaire en O à Δ. La droite Δ' coupe (AB) en F et (CD) en H.
Soit s la symétrie de centre O.
1/ Déterminer les images par s de Δ et de (BC). En déduire l'image par s du point E.
2/ Procéder de même pour déterminer l'image par s du point F.
3/ Déterminer la nature du quadrilatère EFGH.

Exercice 70 Projection orthogonale et translation Voir pages 234 et 239.

Soit ABC un triangle. On construit un carré BCDE sur le côté [BC]. Les points B et E se projettent orthogonalement sur (AC) en B' et E'. Les points C et D se projettent orthogonalement sur (AB) en C' et D'.
Les droites (BB') et (CC') se coupent en H, les droites (DD') et (EE') se coupent en I.
1/ Quelles sont les images des droites (BB') et (CC') par la translation de vecteur $\overrightarrow{BE}$?
2/ Démontrer que les points A, H et I sont alignés.

Exercice 71 Projection orthogonale et parallélisme Voir pages 228 et 239.

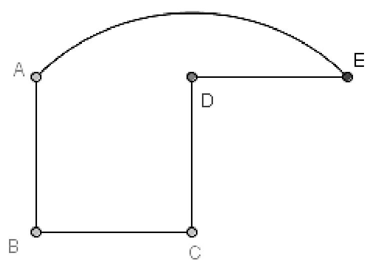
Soit ABC un triangle rectangle en A, H le pied de la hauteur issue de A. L et K sont respectivement les projetés orthogonaux de H sur (AC) et (AB). Soit I le milieu de [BC].
On souhaite démontrer que les droites (LK) et (AI) sont perpendiculaires.
a/ Soit J le point d'intersection des droites (LK) et (AH). La parallèle à (AB) passant par J coupe (BC) en M. Démontrer que M est le milieu de [BH].
b/ Démontrer que (LK) et (MK) sont perpendiculaires en utilisant les triangles HJK et HMK.
c/ Démontrer que $\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BK}{BA}$. En déduire que les droites (MK) et (AI) sont parallèles.
d/ Conclure à propos des droites (LK) et (AI).
e/ Proposer une autre démonstration en utilisant des égalités d'angles.

Exercice 72 Rotation Voir pages 237 et 291.

Soit ABCDEF un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre O de rayon 4. On appelle I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD], [DE], [EF] et [FA]. Construire la figure.
1/ Quelles sont les images des points B, C, D , E et F par la rotation r de centre O qui transforme A en B ?
2/ Déterminer les images par r des points I, J, K, L, M et N.
3/ Démontrer que l'hexagone IJKLMN est un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre O. Calculer le rayon de ce cercle.
4/ Calculer l'aire de chacun des hexagones ABCDEF et IJKLMN. Démontrer que l'aire du petit est égale à 75% de l'aire du grand.

Exercice 73 Partage d'aire Voir page 237.

On considère la figure ci-contre constituée d'un carré ABCD, du point E symétrique de A par rapport à D et de l'arc $\overset{\frown}{AE}$ de centre C. En deux coups de ciseaux, partager cette figure en deux figures superposables.



Cette œuvre est mise à disposition sous licence Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 2.0 France.
Pour voir une copie de cette licence, visitez http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/

Exercice 74 Rotation Voir pages 210 et 237.

On se propose de démontrer le *théorème de Pythagore* en utilisant des transformations du plan. Soit ABC un triangle direct rectangle en A. Construire les carrés directs BAGF, ACHI et CBED.
La hauteur issue de A du triangle ABC coupe (BC) en K et (ED) en L.
1/ Démontrer que les triangles FBA et FBC ont la même aire.
2/ Déterminer l'image du triangle FBC par la rotation de centre B et d'angle 90° dans le sens direct.
3/ Démontrer que les triangles BEA et BEK ont la même aire.
4/ En déduire que le carré ABFG a la même aire que le rectangle BKLE.
5/ Démontrer de même que le carré ACHI a la même aire que le rectangle CDLK.
6/ Conclure.

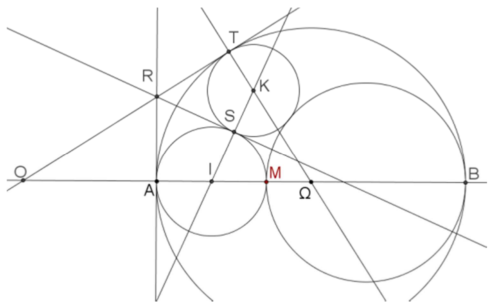
Exercice 75 Cercle inscrit et cercles exinscrits d'un triangle. Voir page 245.

Trois droites sont sécantes deux à deux en A, B et C. Les droites bissectrices des angles qu'elles forment déterminent 4 points de concours qui sont le centre O du cercle inscrit dans le triangle ABC et les centre O_A , O_B et O_C des trois *cercles exinscrits* au triangle ABC. Chacun de ces cercles est tangent au trois droites initialement tracées. On appelle T_A , T_B et T_C les points de contact du cercle inscrit dans le triangle ABC respectivement avec les côtés opposés aux sommets A, B et C. Le triangle $T_A T_B T_C$ est le *triangle de Gergonne* du triangle ABC. Les droites (AT_A), (BT_B) et (CT_C) sont concourantes en un point Γ qui s'appelle le *point de Gergonne*.
On appelle U_A, U_B et U_C les pieds respectifs des perpendiculaires aux supports des côtés [BC], [AC] et [AB] passant respectivement par les centres O_A , O_B et O_C des cercles exinscrit au triangle ABC. Le triangle $U_AU_BU_C$ est le *triangle de Nagel* du triangle ABC. Les droites (AU_A), (BU_B) et (CU_C) sont concourantes en un point N qui est le *point de Nagel* du triangle ABC.
Les droites (O_AU_A), (O_BU_B) et (O_CU_C) sont concourantes en un point β qui s'appelle le *point de Bevan* du triangle ABC. Le triangle $O_AO_BO_C$ est le *triangle de Bevan* du triangle ABC.

Tracer trois droites sécantes deux à deux en A, B et C.
Construire le cercle inscrit dans le triangle ABC et les cercles exinscrit au triangle ABC.
Construire le triangle et le point de Gergonne, le triangle et le point de Nagel, le triangle et le point de Bevan.

Exercice 76 Construction d'un cercle tangent à trois autres. Voir page 240.

On considère un cercle C_1 de centre Ω et de diamètre [AB] et un point M de [AΩ]. On appelle C_2 et C_3 les cercles de diamètres [AM] et [BM] respectivement. Soit I le milieu de [AM].



Le but du problème est de construire un cercle tangent extérieurement aux cercles C_2 et C_3 et intérieurement au cercle C_1.

Construire le centre O, distinct de M, de l'homothétie qui transforme C_1 en C_2.
Construire une tangente à C_1 passant par O. Soit T son point de contact avec le cercle C_1 et soit R son intersection avec la perpendiculaire à (AB) passant par A.
Construire la tangente à C_1 passant par R, soit S son point de contact avec le cercle C_1.
Le centre du cercle cherché est le point K situé à l'intersection des droites (TΩ) et (IS).

Cette œuvre est mise à disposition sous licence Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 2.0 France.
Pour voir une copie de cette licence, visitez http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/

Exercice 77 Droite d'Euler approche vectorielle. Voir page 260.

ABC est un triangle non équilatéral inscrit dans un cercle de centre O. I et J sont les milieux respectifs des côtés [BC] et [AC], G est le centre de gravité du triangle ABC.

Soit H le point défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

1/ Démontrer que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\ \overrightarrow{OI}$, en déduire que $\overrightarrow{AH} = 2\ \overrightarrow{OI}$.

2/ En déduire que (AH) est une hauteur du triangle ABC.

3/ Démontrer de la même manière que (BH) est aussi une hauteur du triangle ABC.

4/ Que représente donc le point H pour le triangle ABC ?

5/ Démontrer que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\ \overrightarrow{GI}$.

6/ Démontrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

7/ Démontrer que $\overrightarrow{OH} = 3\ \overrightarrow{OG}$.

8/ Que peut-on en déduire quant à la position relative du centre de gravité, du centre du cercle circonscrit et de l'orthocentre d'un triangle non équilatéral ?

Exercice 78 Géométrie analytique et calcul d'aire. Voir pages 271 ou 276.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ; I ; J)

On considère un triangle ABC. Le but de cet exercice est de déterminer l'aire du triangle ABC. On commence par déterminer l'équation réduite de la médiatrice de [AB]. On en déduit celle de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. On détermine ensuite les coordonnées du pied de cette hauteur puis les longueurs nécessaires au calcul de l'aire du triangle.

On considère les point A (– 2 ; 1) , B (10 ; 5) et C (4 ; – 2)

1/ Soit M (x ; y) un point de la médiatrice de [AB] . Donner l'expression de MA^2 et celle de MB^2. En déduire l'équation réduite de la médiatrice de [AB].

2/ Déterminer l'équation réduite de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

3/ Déterminer l'équation réduite de (AB).

4/ En utilisant les résultats des questions 2 et 3, déterminer les coordonnées du pied P de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

5/ Calculer la hauteur CP du triangle ABC relative au côté [AB]. Calculer AB.

6/ Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 79 Points entiers. Voir pages 21 et 268.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ; I ; J). Soit (δ) la droite d'équation réduite $y = \frac{17}{13}x - \frac{2}{13}$.

L'objet de l'exercice est de déterminer si la droite (δ) passe par des points à coordonnées entières du repère.

1/ Déterminer le PGCD de 17 et 13 en utilisant l'algorithme d'Euclide.

2/ Les divisions euclidiennes effectuées en appliquant algorithme d'Euclide conduisent aux égalités suivantes :

$13 - 3 \times 4 = 1$ et $4 = 17 - 1 \times 13$

En déduire un couple (a ; b) d'entiers relatifs solution de l'équation $17a - 13b = 1$

3/ Démontrer que les équations $y = \frac{17}{13}x - \frac{2}{13}$ et $17x - 13y = 2$ sont équivalentes

4/ Vérifier que le point A (– 6 ; – 8) appartient à la droite (δ) d'équation cartésienne $17x - 13y = 2$.

5/ On note k un entier relatif. Vérifier que les points M_k (– 6 + 13k ; – 8 + 17k) appartiennent à la droite (δ).

6/ En déduire une construction simple de la droite (δ) dans le repère (O ; I ; J) d'unité 0,5 cm.

Cette œuvre est mise à disposition sous licence Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 2.0 France.
Pour voir une copie de cette licence, visitez http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/