Exercice 57 Médiatrice et bissectrice Voir page 192.

On se propose de démontrer que la bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe la médiatrice du segment [BC] en un point situé sur le cercle circonscrit au triangle ABC.
La médiatrice de [BC] coupe le cercle circonscrit au triangle ABC, de centre O, en R et T.
On suppose que A et T sont sur le même arc $\overset{\frown}{BC}$. Faire une figure.

Démontrer que (AR) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 58 Angle inscrit et triangles semblables Voir page 199.

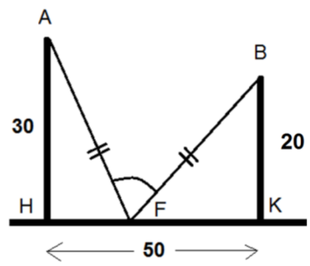
On considère un carré ABOC et on trace l'arc $\overset{\frown}{BC}$ de centre O à l'intérieur du carré. Soit M un point de cet arc. La perpendiculaire à (AC) passant par M coupe (AC) en E. La perpendiculaire à (AB) passant par M coupe (AB) en F. La perpendiculaire à (BC) passant par M coupe (BC) en D.

Déterminer la mesure en degré des angles $\widehat{DME}$ et $\widehat{DMF}$.
Démontrer que les points B, D, M et F sont cocycliques.
Démontrer que les points C, D, M et E sont cocycliques.

Comparer les angles $\widehat{MED}$, $\widehat{MCB}$, $\widehat{MBA}$ et $\widehat{MDF}$.
Que peut-on en déduire quant aux triangles MED et MDF.
Démontrer la relation $MD^2 = ME \times MF$.

Exercice 59 Un problème de Léonard de Pise Voir page 210.

« Deux tours élevées, l'une de 30 pas, l'autre de 20 pas, sont distantes de 50 pas. Entre ces deux tours se trouve une fontaine vers le centre de laquelle deux pigeons, descendant de leurs sommets, se dirigent du même vol et parviennent en même temps. » Déterminer la distance du centre de la fontaine au pied des deux tours et déterminer la mesure α sous laquelle on voit, du centre de la fontaine, les sommets des deux tours.
Généralisation : envisager le cas où les tours ont une hauteur a et b respectivement, séparées par une distance a + b.



Exercice 60 Formule de Héron Problème de synthèse.

On considère un triangle ABC de côtés a, b, c, d'aire S, on appelle p le demi-périmètre de ce triangle.
Le but de ce problème est de démontrer la formule de Héron d'Alexandrie $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
Cette formule permet de calculer l'aire d'un triangle à partir des longueurs des trois côtés du triangle.

1/On appelle r le rayon du cercle de centre I inscrit dans le triangle ABC.

Partager le triangle ABC en trois triangles de sommet I. Démontrer que $S = p \times r$. On notera que $r = \dfrac{S}{p}$

2/ On note r' le rayon du cercle de centre J ex-inscrit dans l'angle $\widehat{BAC}$. Ce cercle est tangent aux droites (AC), (AB) et (BC), à l'extérieur du triangle ABC et à l'intérieur du secteur angulaire $\widehat{BAC}$ qui contient le segment [BC]. Le point J est donc le point de concours de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ et des bissectrices extérieurs des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

En remarquant que S = Aire AJB + Aire AJC – Aire BJC, démontrer que $S = r' \times (p-a)$

3/ Soit D le pied de la perpendiculaire à (AB) passant par le point I et E le pied de la perpendiculaire à (AB) passant par le point J.

a/ Démontrer que les triangles BDI et BEJ sont semblables. En déduire que $\dfrac{BD}{JE} = \dfrac{DI}{EB}$. [1]

b/ Soit D, F et K les points de contact du cercle inscrit dans le triangle ABC avec les côtés [AB], [BC] et [CA].
Démontrer que AK + CF + BD = p. En déduire que BD = p – b.
Démontrer de manière analogue que BE = p – c .
c/ Déduire de ces résultats que $rr' = (p-b)(p-c)$
4/ Calculer S^2 en utilisant les résultats antérieurs et démontrer que $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Exercice 61 Calcul de longueurs dans le triangle rectangle Voir pages 192, 210, 216, 222.

Soit RTL un triangle rectangle en T. On donne $\widehat{L} = 60°$ et TL = 5 cm

1/ Construire le triangle RTL à la règle et au compas, compléter la figure au fur et à mesure.

2/ Sachant que $\cos 60° = \frac{1}{2}$, démontrer, en détaillant le raisonnement que, RL = 10 cm.

3/ Déterminer la valeur exacte de RT.

4/ Construire le milieu I de [RT]. La parallèle à (TL) passant par I coupe (RL) en O. Construire O.
Démontrer que O est le milieu de [RL].

5/ Que peut-on dire du cercle (C) de centre O passant par T ? Justifier.

6/ La parallèle à (RT) passant par O coupe (LT) en E.
Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle OIE, justifier.

7/ Démontrer que (EI) est parallèle à (RL)

8/ Calculer EI. Justifier.

9/ Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OIE. Construire H.
Calculer la valeur exacte de OH, justifier.

10/ Déterminer la valeur exacte de la distance du point I à la droite (RL).

Exercice 62 Equation trigonométrique Voir page 308.

On considère l'équation $\sin\left(\frac{9\pi}{2} - \frac{\pi}{x}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'intervalle I =] $\frac{1}{5}$; 3].

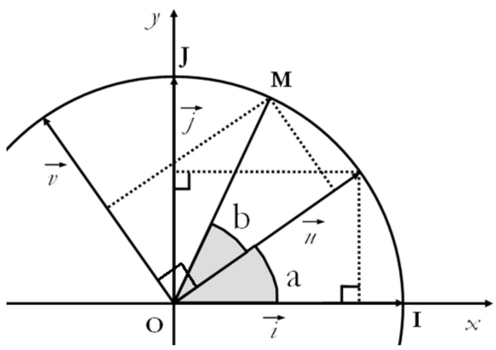
a/ Utiliser les mesures principales et les angles associés pour transformer le sinus en cosinus.

b/ Déterminer dans quel intervalle varie $\frac{\pi}{x}$ quand x varie dans l'intervalle I.

c/ En déduire le nombre de solutions de l'équation $\sin\left(\frac{9\pi}{2} - \frac{\pi}{x}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'intervalle I =] $\frac{1}{5}$; 3].

Exercice 63 Démonstration des *formules d'addition* cos (a + b) et sin (a + b) Voir pages 216, 219 et 274.

Les repères (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) et (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) sont orthonormés.



1/ Exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

2/ Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3/ Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

4/ En déduire l'expression de cos(a + b) et de sin(a + b).

5/ En remarquant que a – b = a + (– b)
déterminer l'expression de cos(a – b) et de sin(a – b).

6/ Dans le cas où b = a, exprimer cos 2a et sin 2a en fonction de cos a et sin a.

Exercice 64 Construction et calcul de longueurs Voir page 209.

Tracer un segment [BC] de 13 cm, horizontal, à environ 10 cm du bas de la feuille, placer B à gauche.

Construire à la règle et au compas le point I de [BC] tel que BI = $\frac{1}{3}$ BC.

Construire le point A, au-dessus de (BC), tel que BA = 5 cm et AC = 12 cm.
Tracer [BA] et placer sur [BA] le point L tel que BL = 14 cm. Tracer [CL].
La parallèle à (BA) passant par I coupe [AC] en J.
La parallèle à (LC) passant par J coupe [BL] en K.
La parallèle à (AC) passant par K coupe [LC] en M.
Calculer dans l'ordre AJ, AL, AK, LK, LC et LM.

Exercice 65 Feux de croisement Voir page 224.

Une voiture dont l'optique de phare P est à 60 cm du sol est placée sur un sol horizontal à 3 m d'un mur vertical. Le rayon lumineux émis par le bloc de phare est légèrement orienté vers le bas. S'il n'y avait pas de mur, il porterait plus ou moins loin selon son inclinaison.

On appelle x la hauteur du trait lumineux mesurée verticalement sur le mur depuis le sol. Donner un encadrement de x pour que la portée des feux de croisement soit comprise entre 30 et 45 m.

En plaçant un sac de sable dans le coffre, le rayon lumineux est dévié de 4 cm vers le haut.

Encadrer alors la nouvelle portée des feux de croisement.

Exercice 66 Théorème de Ménélaüs Approfondissement

Convention d'écriture : Trois point E, D et F étant alignés dans cet ordre, on appelle mesure algébrique de ED et on note $\overline{ED}$ la longueur orientée de [ED]. Le sens dans lequel on oriente la droite support des points E, D et F importe peu, on convient simplement que deux longueurs mesurées dans le même sens sur une droite ont des mesures algébriques de même signe et que si elles sont mesurées dans des sens contraires elles sont de signes opposés. Ainsi $\overline{ED} = -\overline{DE}$. Les points E, D et F étant alignés dans le cet ordre, $\overline{ED}$, $\overline{DF}$ et $\overline{EF}$ sont de même signe, par exemple positif et $\overline{DE}$, $\overline{FD}$ et $\overline{FE}$ sont alors tous les trois négatifs.

a/ Soit un triangle ABC. Une droite D coupe les droites (BC), (CA) et (AB) respectivement en A', B' et C'.
La parallèle à D passant par C coupe(AB) en C_1.

Comparer $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$ et $\dfrac{\overline{C'B}}{\overline{C'C_1}}$ d'une part, et $\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ et $\dfrac{\overline{C'C_1}}{\overline{C'A}}$ d'autre part.

En déduire que $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1$ (R)

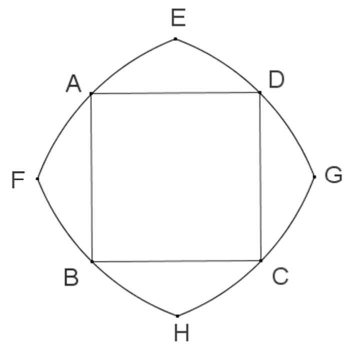
b/ Réciproquement, soit A', B' et C' trois points respectivement situés sur les droites (BC), (CA) et (AB) et vérifiant la relation (R). Montrer que les points A', B' et C' sont alignés. On pourra par exemple supposer que (A'B') coupe (AB) en C'', et, en appliquant la relation (R) montrer que C'' = C'.

D'où l'énoncé du théorème de Ménélaüs :

Soit A', B' et C' trois points respectivement situés sur les droites (BC), (AC) et (AB), supports des côtés du triangle ABC. A', B', C' sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1$

Exercice 67 Problème de recherche, avec calculatrice.

Chaque sommet du carré ABCD de côté 1 est le centre de l'arc qui passe par le sommet opposé.



1/Déterminer une valeur approchée de la mesure de θ l'angle $\widehat{HAG}$ en radian à 10^{-6} près. Vérifier que le sin θ = $\frac{3}{4}$. En déduire cos θ.

2/ Démonter que le carré EFGH a pour côté FH = $2\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}$

3/ Démontrer que l'aire d'un onglet, partie comprise entre un arc de cercle et la corde sous tendue, est égale à $\dfrac{r^2(\theta - \sin\theta)}{2}$, où r est le rayon du cercle et θ la mesure en radian de l'angle au centre qui intercepte l'arc de l'onglet.

4/ Calculer l'aire totale de la figure en unités d'aire à 10^{-4} près.