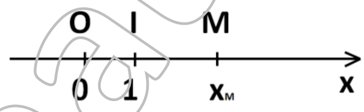
13. Géométrie analytique

La géométrie analytique permet de résoudre par le calcul des problèmes de géométrie. Il convient toutefois de ne pas perdre de vue que la géométrie analytique est d'abord de la géométrie, qu'une figure s'impose pour illustrer la configuration, orienter les calculs et leur donner du sens.
Ce chapitre suppose d'être capable d'enchaîner avec vélocité et fiabilité des calculs tant numériques que littéraux sans perdre de vue leur signification. En cela un entrainement intensif pour maîtriser les techniques de base est indispensable. Le plus souvent une erreur de calcul est détectable sur une figure à l'échelle car l'incohérence est alors flagrante. Il est ainsi facile de vérifier la véracité des résultats trouvés. Le travail personnel prend ici toute sa mesure et sera très vite récompensé.

13.1 Droite graduée et abscisse d'un point

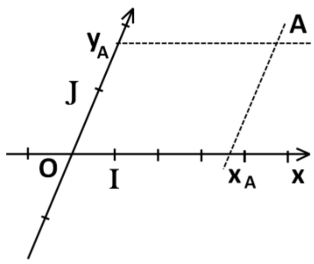
Soit (d) une droite. Choisissons un point O de (d) comme origine. Soit I un point de (d) distinct de O.
Le choix de ce point I permet d'orienter la droite (d) de O vers I et de la graduer à partir de l'origine O en considérant la longueur OI comme unité. Une droite ainsi orientée et graduée s'appelle un *axe*.
Chaque point de la droite peut ainsi être repéré par un nombre relatif appelé abscisse du point.

Par définition, l'abscisse le l'origine O est 0 et l'abscisse du point I est 1.
Le plus souvent, on oriente la droite de la gauche vers la droite mais ce n'est pas une obligation.
Si x_M désigne l'abscisse du point M, on note $M(x_M)$.



13.2 Repère du plan et coordonnées

Deux axes non parallèles de même origine O forment un repère du plan.



Dans le repère (O,I,J), dire que le point A a pour *coordonnées* $(x_A ; y_A)$ signifie que le point A est situé à l'intersection de la droite parallèle à (OJ) passant par le point d'*abscisse* x_A sur l'*axe des abscisses* et de la parallèle à (OI) passant par le point d'*ordonnée* y_A sur l'*axe des ordonnées*.

le point O est l'*origine* du repère. Le plus souvent l'axe des abscisses est horizontal orienté vers la droite, l'autre axe est l'axe des ordonnées, le plus souvent orienté vers le haut, parfois vertical.
L'unité de longueur utilisée sur chaque axe n'est pas forcément la même.
Par définition, l'abscisse du point I est 1, son ordonnée est nulle, et l'abscisse du point J est nulle, son ordonnée est 1.

13.2.1 Coordonnées du milieu d'un segment

Pour calculer les *coordonnées du milieu* d'un segment, on calcule la moyenne arithmétique des abscisses de ses extrémités et la moyenne arithmétique des ordonnées de ses extrémités.

Si I est le milieu de [AB], cela donne : $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ $I\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$

Cette *notation matricielle* permet de présenter les calculs simplement.

13.2.2 Coordonnées du symétrique d'un point

Si B est le symétrique de A par rapport au point I, alors I est le milieu de [AB].

Posons A$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$; B$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$; I$\begin{pmatrix} x_I \\ y_I \end{pmatrix}$ on a I$\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$ d'où $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_B = 2x_I - x_A \\ y_B = 2y_I - y_A \end{cases}$

finalement B$\begin{pmatrix} 2x_I - x_A \\ 2y_I - y_A \end{pmatrix}$.

13.2.3 Coordonnées du quatrième sommet d'un parallélogramme

Si A, B et C sont donnés et qu'on cherche les coordonnées de D tel que ABCD soit un parallélogramme, on commence par déterminer les coordonnées du milieu K de [AC], puis on calcule les coordonnées de D qui est alors le symétrique de B par rapport à K. Voir aussi 13.7.4 page 274.

13.2.4 Coordonnées du centre de gravité d'un triangle

Soit A$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ et C$\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$ les sommets du triangle ABC. Les coordonnées de son *centre de gravité* G sont les moyennes des coordonnées des sommets du triangle ABC : G$\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{pmatrix}$.

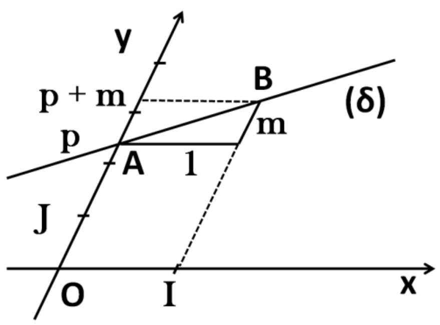
Remarque : Le centre de gravité est à un triangle ce que le milieu est à un segment : son isobarycentre.

13.3 Equation de droite

13.3.1 Equation réduite de droite

La représentation graphique de la fonction affine qui à x associe mx + p est la droite (δ) qui passe par le point A(0 ; p) et par le point B(1 ; p + m). Le nombre m s'appelle le *coefficient directeur* de la droite (δ), on parle aussi de taux d'accroissement de la fonction affine qui à x associe mx + p.

Le nombre p s'appelle l'*ordonnée à l'origine*, c'est l'ordonnée du point de la droite (δ) dont l'abscisse est nulle, c'est-à-dire du point A, intersection de δ et de l'axe des ordonnées.



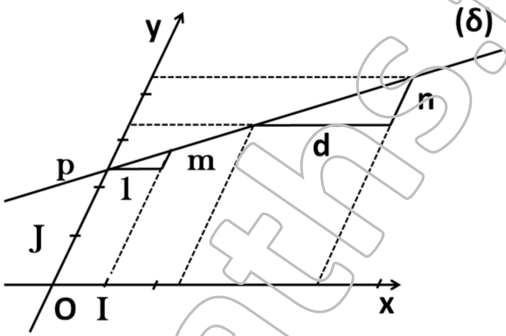
Si M(x ; y) est un point de δ , on a $\dfrac{y - p}{x - 0} = m$ puisque le taux d'accroissement est constant. En conséquence, y = mx + p.

Cette relation entre l'abscisse et l'ordonnée d'un point M de (δ) est l'*équation réduite de la droite* (δ).
On note : (δ) : y = mx + p.

13.3.2 Interprétation géométrique du coefficient directeur

Le coefficient directeur m de la droite (δ) est la valeur dont varie l'ordonnée d'un point mobile sur (δ) lorsque son abscisse augmente de 1.

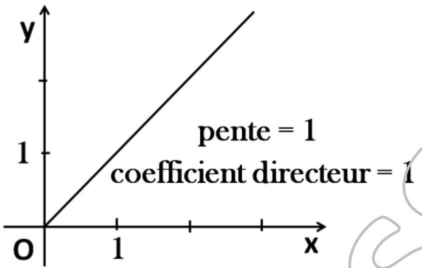
Si m est un rationnel, posons $m = \frac{n}{d}$ par exemple, fraction irréductible de préférence, l'ordonnée varie de $\frac{n}{d}$ lorsque l'abscisse augmente de 1 et, en reproduisant ce déplacement élémentaire d fois, l'ordonnée varie de n lorsque l'abscisse augmente de d.

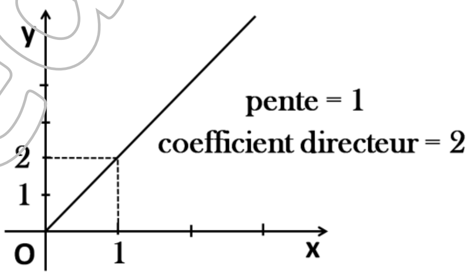


Dans un repère donné, deux *droites parallèles* ont le même *coefficient directeur*.

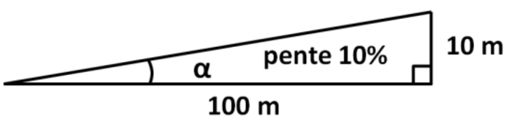
13.3.3 Distinction entre coefficient directeur et pente d'une droite

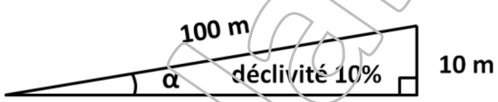
Dans un repère donné ces deux nombres sont proportionnels et traduisent « l'inclinaison » d'une droite. La pente et le coefficient directeur correspondent à la quantité dont varie l'ordonnée quand l'abscisse augmente d'une unité. Compte tenu des échelles utilisées sur chaque axe, la mesure de cette quantité dépend de la graduation sur l'axe des ordonnées. La *pente* d'une droite est égale à la *tangente* de l'angle qu'elle forme avec l'axe horizontal des abscisses et, si le repère est orthonormé, elles sont égales au coefficient directeur de la droite.





On peut aussi exprimer la *pente en pourcentage*, c'est le cas sur les panneaux routiers : ces pourcentages-là sont calculés ainsi : (dénivelé/distance parcourue à l'horizontale) × 100
ou encore : 100 × tan α.



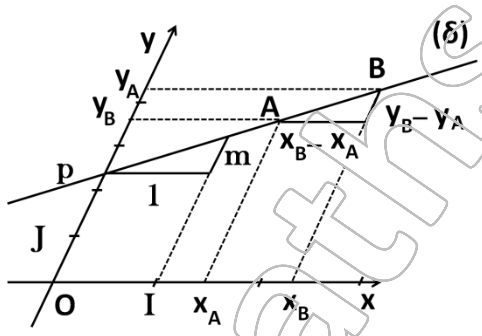


💣 Attention à ne pas confondre la pente avec la *déclivité* en pourcentage qui est calculée ainsi :
(dénivelé/distance parcourue sur la route) × 100
ou encore : 100 × sin α.

Dans la pratique, l'hypoténuse est plus facile à mesurer que le côté adjacent et donc la déclivité est plus facile à calculer que la pente et, pour un angle donné, elle est toujours inférieure à la pente.
Toutefois, pour la plupart des routes, l'écart est faible : dans le cas d'un angle de 15° la pente est de 26,8% et la déclivité de 25,9% . Des routes aussi raides sont rares et peu fréquentées !

13.3.4 Equation réduite d'une droite définie par deux points

On procède exactement de la même manière que pour déterminer une fonction affine connaissant les images de deux nombres. Voir 4.3.4 page 145.



Le coefficient directeur de la droite (δ) qui passe par les points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ est $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Les point M(x ; y) dont les coordonnées vérifient l'équation de (δ) sont tels que $m = \dfrac{y - y_A}{x - x_A}$ d'où

(δ) : $y = m(x - x_A) + y_A$

En développant le membre de droite (δ) : $y = m(x - x_A) + y_A = m\,x + y_A - m\,x_A$

Ainsi (δ) admet l'équation réduite $y = mx + p$ avec $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et $p = y_A - m\,x_A$

13.3.5 Equation de droite, points entiers et équation diophantienne

Une *équation diophantienne* est une équation du type ax + by = c où les coefficients a, b, c et les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Lorsque c vaut un, nous avons vu au paragraphe 2.4.8.3 page 97 comment on pouvait trouver un couple (x ;y) solution de cette équation en utilisant les divisions euclidiennes qui interviennent dans la mise en œuvre de l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD de a et b. Vous verrez en terminale une méthode générale de résolution des équations diophantiennes de cette sorte et une partie de la théorie qui va avec. Abordons deux exemples simples.

Exemple 1 : considérons la droite (δ) dont l'équation cartésienne est 2 x + 3 y = 7.

Son équation réduite est $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3}$, on remarque pour x = 2 on a y = 1, donc la droite (δ) passe par le point entier A(2 ; 1), et puisque son coefficient directeur est $-\dfrac{2}{3}$, à chaque fois que x augmente de 3, y diminue de 2.

Donc (δ) passe par tous les points entiers de coordonnées (2 + 3k ; 1 – 2k) avec k entier relatif.
A partir d'un couple solution particulier, on peut ainsi déterminer tous les autres.

Exemple 2 : considérons maintenant la droite (d) d'équation cartésienne 4x + 6y = 3.

Son équation réduite est $y = -\dfrac{4}{6}x + \dfrac{3}{6}$ qui se simplifie en $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{2}$.

Or, il est impossible d'obtenir un nombre entier en ajoutant des tiers à $\dfrac{1}{2}$.

En conséquence, la droite (d) ne passe par aucun point de coordonnées entières.
Cela se produit lorsque la constante c n'est pas un multiple du PGCD des coefficients a et b.

13.4 Système linéaire de deux équations à deux inconnues

Considérons le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ Chaque équation de ce système peut s'interpréter comme l'équation cartésienne d'une droite dans un repère.
(Voir 13.8.2 Equation cartésienne de droite page 275)

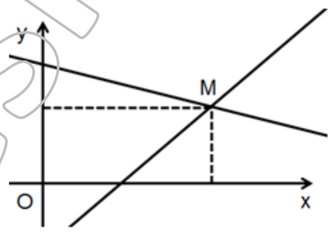
Moyennant un jeu d'écritures, un tel système se transforme en $\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$

à condition de poser $m = -\dfrac{a}{b}$ $\quad p = \dfrac{c}{b}$ $\quad m' = -\dfrac{a'}{b'}$ $\quad p' = \dfrac{c'}{b'}$.

Chaque équation s'interprète alors comme l'équation réduite d'une droite dans un repère.

Trois cas de figure sont alors possibles, deux droites sécantes, deux droites distinctes parallèles et deux droites confondues.

Premier cas, le plus connu : les deux droites sont sécantes, elles ont des coefficients directeurs différents. Le système admet alors un unique couple solution qui correspond aux coordonnées du point d'intersection des deux droites.
Analytiquement, cette situation correspond au cas où $ab' - a'b \neq 0$.



Dans ce cas $S = \left\{ \left(\dfrac{cb' - c'b}{ab' - a'b} ; \dfrac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \right) \right\}$.

Une petite astuce pour retrouver ces formules dites « formules de Cramer » :

Calculer les trois déterminants comme indiqué ci- dessous :

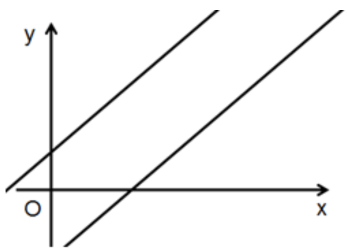
$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$	$\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$	$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$
est le dénominateur de x et de y.	est le numérateur de x.	est celui de y.

Le premier déterminant est celui des coefficients des termes en x et y du système.
Pour le deuxième déterminant, on remplace les coefficients des termes en x par les constantes.
Pour le troisième déterminant, on remplace les coefficients des termes en y par les constantes.

Pour retrouver ces formules le lecteur est invité à résoudre le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$
en utilisant la méthode vue page103.

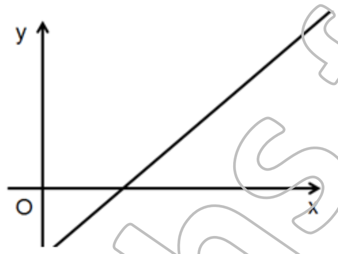
Dans le cas contraire $ab' - a'b = 0$. Les deux droites sont parallèles.
On distingue deux autres situations : le deuxième cas, ci-dessous, et troisième cas, au verso.

Deuxième cas : les droites sont parallèles et distinctes, elles n'ont donc aucun point commun et l'ensemble des solutions du système est vide. On rencontre ce cas lorsque les coefficients des termes en x et en y sont proportionnels mais pas les constantes.
Analytiquement on a : $ab' - a'b = 0$ et $ac' - a'c \neq 0$.



Dans ce cas $S = \varnothing$

Troisième cas : les droites sont parallèles mais elles sont confondues, le système admet alors une infinité de couples solutions : les couples des coordonnées des points de la droite. On rencontre ce cas lorsque les coefficients des termes en x, en y et les constantes sont proportionnels.



Les deux équations cartésiennes sont celles d'une seule et même droite. Analytiquement les coefficients des deux équations sont donc proportionnels et on a non seulement $ab' - a'b = 0$ mais aussi $ac' - a'c = 0$ et forcément $bc' - b'c = 0$.

Dans ce cas $\quad S = \left\{(x\,;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tels que } ax + by + c = 0\right\} = \left\{(x\,;mx + p),\ x \in \mathbb{R}\right\}.$

On peut aussi travailler à partir des équations réduites de droites, le système est alors du type $\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$ on distingue les différents cas de la manière suivante :

Le premier cas correspond à $m \neq m'$, les deux droites ne sont pas parallèles,
le deuxième cas à $m = m'$ et $p \neq p'$, les droites sont parallèles et distinctes,
et le troisième cas à $m = m'$ et $p = p'$ les deux droites sont confondues.

Remarque : lorsque le système de deux équations à deux inconnues est donné sous la forme $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ et que $ab' - a'b \neq 0$ on retrouve les formules qui donnent le couple solution en recopiant les coefficients a, b, c, a', b' et c' sur deux lignes et en répétant la première colonne à la fin : $\begin{matrix} a\,b\,c\,a \\ a'b'c'a' \end{matrix}$. On calcule ensuite les trois déterminants suivants :

$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{matrix} c & a \\ c' & a' \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a \\ a' \end{matrix} \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \begin{matrix} a \\ a' \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a & b \\ a' & b' \end{matrix} \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}$

$ab' - a'b$ est le dénominateur non nul, $bc' - b'c$ est le numérateur de x et $ca' - c'a$ est celui de y.

Finalement, on a dans ce cas $\quad S = \left\{\left(\dfrac{bc' - b'c}{ab' - a'b}; \dfrac{ca' - c'a}{ab' - a'b}\right)\right\}$

13.5 Partition du plan, système d'inéquations à deux inconnues

Un *système de plusieurs inéquations à deux inconnues* peut se résoudre graphiquement en utilisant la méthode suivante :

1/ Commencer par écrire le système sous une forme réduite du type $\begin{cases} y \geq ax + b \\ y < mx + p \\ y \leq ux + v \end{cases}$

Interprétons un tel système : chaque inéquation détermine un demi-plan limité par une droite frontière. L'équation réduite de chaque droite frontière est obtenue en remplaçant le symbole d'inégalité par « = ». Les solutions du système sont les coordonnées des points qui appartiennent à l'intersection de ces demi-plans, c'est-à-dire la partie commune à chacun d'eux.

2/ Tracer ensuite les droites frontières (d_1) : $y = ax + b$, (d_2) : $y = mx + p$ et (d_3) : $y = ux + v$.

3/ Pour chaque droite, choisir le demi-plan solution par rapport à la droite frontière :
Au-dessus pour ≥ ou >, en dessous pour ≤ ou < et hachurer l'autre, celui qui n'est pas solution.

4/ La zone non hachurée est celle qui contient les points dont les coordonnées sont solutions du système d'inéquations à deux inconnues. Selon que les inégalités sont strictes ou larges, on précise au cas par cas si la frontière est comprise ou non dans la zone solution.
Voir exemple détaillé au paragraphe 2.10 page 113.

13.6 Cas d'un repère orthonormé, longueur et perpendiculaires

ABC est un *triangle direct* quand le trajet qui va de A vers B puis de B vers C tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Dans le sens des aiguilles d'une montre le triangle est indirect.

Si le triangle direct IOJ est rectangle en O, le repère est dit orthogonal.
Si le triangle direct IOJ est isocèle en O, le repère est dit normal.
Si le triangle direct IOJ est rectangle-isocèle en O, le repère est dit orthonormé ou orthonormal.
Si le triangle OIJ est direct, le repère (O ; I ; J) est dit direct. Sinon il est indirect.

Pour les paragraphes 13.6.1 à 13.6.6 qui suivent, on se place dans un repère orthonormé direct.

13.6.1 Longueur d'un segment

La *longueur* du segment [AB] est AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

La démonstration est laissée au lecteur, il suffit de faire une figure dans un repère orthonormé et d'appliquer le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle bien choisi pour calculer AB² et en déduire AB.

13.6.2 Equation de la médiatrice d'un segment

Soit A$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ et M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point de la *médiatrice* (d) du segment [AB].

$M \in (d) \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2} = \sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2}$

Les expressions sous les radicaux sont positives donc en élevant au carré

$M \in (d) \Leftrightarrow (x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = (x-x_B)^2+(y-y_B)^2$.

Reste ensuite à développer chaque membre, les x² et les y² s'éliminent spontanément

$M \in (d) \Leftrightarrow x^2-2x\times x_A+x_A{}^2+y^2-2y\times y_A+y_A{}^2 = x^2-2x\times x_B+x_B{}^2+y^2-2y\times y_B+y_B{}^2$

$M \in (d) \Leftrightarrow -2x\times x_A+x_A{}^2-2y\times y_A+y_A{}^2 = -2x\times x_B+x_B{}^2-2y\times y_B+y_B{}^2$

$M \in (d) \Leftrightarrow 2(x_B-x_A)x+2(y_B-y_A)y+x_A{}^2-x_B{}^2+y_A{}^2-y_B{}^2=0$

qui est bien l'équation cartésienne d'une droite, c'est-à-dire du type ax + by + c = 0 avec dans ce cas :

$a=2(x_B-x_A),\ b=2(y_B-y_A)\ et\ c=x_A{}^2-x_B{}^2+y_A{}^2-y_B{}^2=(x_A+x_B)(x_A-x_B)+(y_A+y_B)(y_A-y_B)$.

Exemple : On considère les points A(– 3 ; – 2) et B(4 ; – 1).
Soit M (x ; y) un point de la médiatrice (d) du segment [AB], il est équidistant des points A et B.

M ∈ (d) ⇔ AM² = BM² ⇔ (x + 3)² + (y + 2)² = (x – 4)² + (y + 1)²
M ∈ (d) ⇔ x² + 6x + 9 + y² + 4y + 4 = x² – 8x + 16 + y² + 2y + 1
M ∈ (d) ⇔ 14x + 2y – 4 = 0 ⇔ y = – 7x + 2
En conséquence, l'équation réduite de la médiatrice de [AB] est y = – 7x + 2

Reprendre ce raisonnement pour déterminer les équations de deux des médiatrices d'un triangle.
Résoudre le système ainsi obtenu pour déterminer les coordonnées du *centre du cercle circonscrit* au triangle et vérifier graphiquement la cohérence du résultat.

13.6.3 Equation de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

On commence par déterminer l'équation de la médiatrice de [AB] comme vu au paragraphe précédent. La médiatrice de [AB] et la hauteur issue de C dans le triangle ABC sont perpendiculaires à (AB). Deux droites perpendiculaires à une même troisième étant parallèles, la médiatrice de [AB] et la hauteur issue de C sont parallèles. En conséquence elles ont le même coefficient directeur. Il ne reste plus qu'à déterminer l'ordonnée à l'origine de telle sorte que les coordonnées de C vérifient l'équation de la hauteur issue de C.
On peut ensuite déterminer avec le même principe l'équation de la médiatrice de [BC] et l'équation de la hauteur relative au côté [BC] dans le triangle ABC. Disposant de cette manière des équations de deux médiatrices du triangle ABC, il est facile de déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC en résolvant un système de deux équations à deux inconnues. De même on peut déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC à partir des équations de deux de ses hauteurs.
Disposant maintenant des coordonnées de Ω et de H on peut déterminer l'équation de la droite d'Euler, (ΩM) et vérifier que les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC vérifient cette équation. Ce qui démontre l'alignement des points Ω, G et H.

Exemple : On considère le triangle ABC tel que $A(-3\,;-2)$, $B(4\,;-1)$ et $C(5\,;2)$.
Les points A et B sont les même qu'au paragraphe précédent.
L'équation réduite de la hauteur issue de C dans le triangle ABC est du type $y = -7x + p$
L'ordonnée à l'origine p et telle que les coordonnées du point C vérifient cette égalité.
En conséquence $2 = -7 \times 5 + p$ donc $p = 37$
L'équation de la hauteur issue de C dans le triangle ABC est donc $y = -7x + 37$

Procéder comme au paragraphe précédent pour déterminer l'équation d'une deuxième médiatrice du triangle ABC, résoudre alors le système de deux équations ainsi obtenu et déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC. Vérifier que $\Omega\,(0\,;2)$.

Déterminer ensuite l'équation d'une autre hauteur du triangle ABC. Résoudre le système pour déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC. Vérifier que $H\,(6\,;-5)$.

Vérifier que $7x + 6y = 12$ est une équation cartésienne de la droite (ΩH).

Déterminer ensuite les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC. Vérifier que $G(2\,;\,\frac{-1}{3})$.

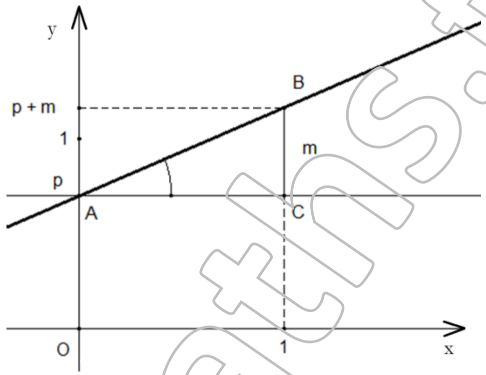
Vérifier que le point G appartient à la droite (ΩH).
Les points Ω, G et H sont alignés sur une droite qui s'appelle la droite d'Euler du triangle ABC.

13.6.4 Coefficient directeur et droites perpendiculaires

On considère le point $A(1\,;m)$ et le point $A'(1\,;m')$.
Calculer OA^2, OA'^2 et AA'^2 en fonction de m et m'.
En déduire que le triangle AOA' est rectangle en O si et seulement si $m \times m' = -1$.

Deux droites d'équations réduite $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leur coefficients directeurs vaut -1.
Ce critère permet de déterminer le coefficient directeur de la droite perpendiculaire à la droite (AB).
A condition de commencer par déterminer les coordonnées du milieu du segment [AB], il est ensuite aisé de déterminer l'équation de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par le milieu de [AB], c'est-à-dire de la médiatrice du segment [AB] ou l'équation de la perpendiculaire à (AB) passant par C, c'est-à-dire la hauteur issue de C dans le triangle ABC.
Cette méthode est plus rapide que celles exposée au deux paragraphes précédents.

13.6.5 Equation réduite de droite et tangente

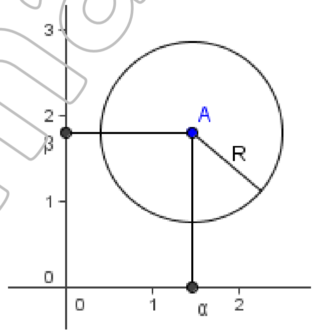


Soit δ la droite d'équation réduite $y = mx + p$.

Soit $A(0 ; p)$, $B(1 ; p + m)$ et $C(1 ; p)$.
Le triangle ACB est rectangle en C et $\tan \widehat{CAB} = \dfrac{CB}{AC} = m$

Ainsi le coefficient directeur d'une droite s'interprète dans un repère orthonormé comme la tangente de l'angle qu'elle forme avec l'axe des abscisses.

13.6.6 Equation d'un cercle



La distance qui sépare un point M du cercle (Ω) de son centre $A\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ est égale à son rayon R.

$M \in (\Omega) \Leftrightarrow AM = R$
or AM et R sont positifs donc
$M \in (\Omega) \Leftrightarrow AM^2 = R^2$

L'*équation du cercle* (Ω) de centre A de rayon R est $(\Omega) : \ (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$

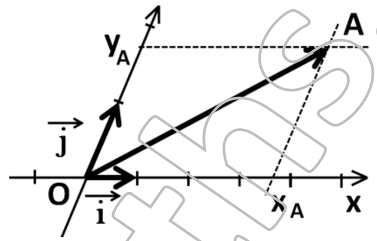
En développant, cette équation devient $(\Omega) : \ x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0$.

De manière générale, une équation du type $a(x^2 + y^2 + bx + cy + d) = 0$ peut s'interpréter comme l'équation d'un cercle à condition de transformer son écriture en utilisant la mise sous forme canonique d'une part pour les termes en x et d'autre part pour les termes en y.

Par exemple l'équation $2(x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12) = 0$
devient $2[(x - 3)^2 + (y + 2)^2] = 50$
qui est l'équation du cercle (Ω) de centre $A(3 ; -2)$ et de rayon $R = 5$. Voir 2.3.2 page 86.

💣 Si le terme en x^2 et le terme en y^2 n'ont pas le même coefficient, l'équation n'est pas celle d'un cercle.

Dans la suite du chapitre, sauf indication contraire, le plan est rapporté à un repère (O ; $\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{j}$) pas forcément orthonormé.



13.7 Repère, coordonnées et composantes

Dans un tel repère, dire que le point A a pour coordonnées $(x_A ; y_A)$ signifie que $\overrightarrow{OA} = x_A\ \overrightarrow{i} + y_A\ \overrightarrow{j}$

13.7.1 Composantes d'un vecteur

Un vecteur n'a pas de coordonnées, il a des *composantes*. La distinction entre les coordonnées et les composantes est la suivante : dans le plan, un point a des coordonnées, son abscisse et son ordonnée, qui correspondent un peu à son adresse dans un repère donné. Un vecteur, lui, n'a pas d'adresse, il est à la fois partout et nulle part, il correspond plutôt à un déplacement, à une translation. Voir 9.2 page 234. Les composantes d'un vecteur s'interprètent davantage comme les instructions relatives aux déplacements qui permettent de passer de son origine à son extrémité, composante selon la direction de l'axe des abscisses et composante selon la direction de l'axe des ordonnées. Malheureusement, dans la plupart des livres, par abus de langage, on ne fait plus la distinction entre composantes et coordonnées et on parle des coordonnées d'un vecteur.

Pour calculer les composantes d'un vecteur à partir des coordonnées de son origine et de son extrémité, on calcule les différences : Abscisse de l'extrémité moins abscisse de l'origine ;
Ordonnée de l'extrémité moins ordonnée de l'origine.

Avec la notation matricielle : $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

13.7.2 Composantes de la somme de deux vecteurs

Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et si $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ on ajoute les composantes selon chaque direction.

13.7.3 Composantes du produit d'un vecteur par un réel

Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et si α appartient à $\mathbb{R}$ alors $\alpha\,\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \alpha\, x \\ \alpha\, y \end{pmatrix}$. On multiplie chaque composante par α.

13.7.4 Coordonnées de l'image d'un point par une translation

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ si M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ alors $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$

donc $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ d'où $M'\begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$.

On ajoute les composantes du vecteur $\overrightarrow{u}$ aux coordonnées du point M.

Si A, B et C sont donnés, le point D tel que ABCD soit un parallélogramme est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

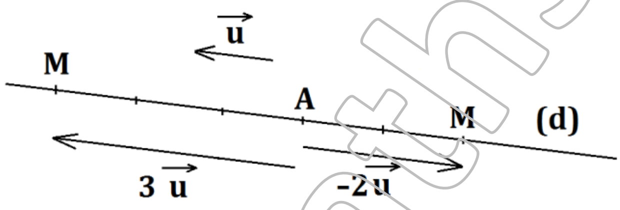
$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$ donc $D\begin{pmatrix} x_A + (x_C - x_B) \\ y_A + (y_C - y_B) \end{pmatrix}$.

13.8 Vecteurs colinéaires et équation cartésienne de droite.

13.8.1 Vecteur directeur

Pour connaître une droite (d), il suffit de connaître un point A et un vecteur non nul $\vec{u}$ dont la direction est celle de (d). On dit que $\vec{u}$ est <u>un</u> *vecteur directeur* de (d).

La droite (d) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.



13.8.2 Equation cartésienne de droite et vecteur directeur

L'ensemble des points $(x\,;y)$ dont les coordonnées vérifient $ax + by + c = 0$, avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$, est une **droite**. Une équation de la forme $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ est dite *équation cartésienne* de (d).

Réciproquement, toute droite du plan admet une équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$, avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$. Si a est nul, la droite est parallèle à l'axe des abscisses, si b est nul elle est parallèle à l'axe des ordonnées.

$\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un *vecteur directeur* de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$

13.8.3 Critère de colinéarité de deux vecteurs

Si deux vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont *colinéaires*, il existe un nombre non nul k

tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Donc $x' = kx$ et $y' = ky$.

Or $x' = kx$ et $y' = ky \Leftrightarrow \dfrac{x'}{x} = k$ et $\dfrac{y'}{y} = k \Leftrightarrow \dfrac{x'}{x} = \dfrac{y'}{y} \Leftrightarrow x'y = xy' \Leftrightarrow xy' - x'y = 0$

Et réciproquement, lorsque $xy' - x'y = 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Le nombre $xy' - x'y$ s'appelle le *déterminant* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
La nullité du déterminant traduit la proportionnalité des composantes des vecteurs de la même manière que l'égalité des « produits en croix » traduit l'égalité de deux fractions. Voir 1.5.3.1.3 page 49.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow xy' - x'y = 0$$

Utilisation du critère de colinéarité de deux vecteurs pour déterminer une équation cartésienne d'une droite.

On considère les points $A(-3\,;-2)$ et $B(4\,;-1)$.

Soit M (x ; y) un point de la droite (AB). Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+3 \\ y+2 \end{pmatrix}$ sont donc colinéaires.

Donc $M \in (AB) \Leftrightarrow 7(y+2) - 1(x+3) = 0 \Leftrightarrow -x + 7y + 11 = 0$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est donc : $x - 7y - 11 = 0$

13.9 Cas d'un repère orthonormé, norme et orthogonalité

On dit que 2 vecteurs non nuls sont **orthogonaux** lorsqu'ils définissent des directions orthogonales, c'est-à-dire que les droites supports des représentants de ces vecteurs sont perpendiculaires.

On note alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

On dit que $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ est **un repère orthonormé** lorsque $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.
Dans ce paragraphe, on se place dans un tel repère.

13.9.1 Norme d'un vecteur

Dans un repère orthonormé, la *norme* du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

La démonstration découle directement du théorème de Pythagore. Le lecteur la fera.

Pour calculer AB, on dispose de la formule AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ mais il est préférable de commencer par déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$, de les vérifier graphiquement, et de calculer enfin la norme $\|\overrightarrow{AB}\|$ en calculant la somme des carrés des composantes du vecteur avant d'en prendre la racine carrée. Pour terminer, on mesure sur la figure pour vérifier la cohérence du résultat obtenu en tenant compte de l'unité de longueur utilisée.

13.9.2 Critère d'orthogonalité de deux vecteurs

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ déterminons une condition pour caractériser l'orthogonalité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, d'après le théorème de Pythagore

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

or
$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 &= x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 \\ &= x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 + 2(xx' + yy') \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(xx' + yy').\end{aligned}$$

donc $xx' + yy' = 0$.

Réciproquement si $xx' + yy' = 0$ alors $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

d'après la réciproque du théorème de Pythagore, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Conclusion : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $xx' + yy' = 0$

Le nombre $xx' + yy'$ s'appelle le *produit scalaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Utilisation du critère d'orthogonalité de deux vecteurs dans un repère orthonormé pour déterminer une équation cartésienne d'une droite perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné.

On considère le triangle ABC tel que A(– 3 ; – 2), B(4 ; – 1) et C(5 ; 2).
Déterminons une équation cartésienne de la hauteur (Hc) issue de C dans le triangle ABC.
Soit M (x ; y) un point de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x - 5 \\ y - 2 \end{pmatrix}$ sont donc orthogonaux.

M ∈ (Hc) $\Leftrightarrow 7(x - 5) + 1(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 7x + y - 37 = 0$

Une équation cartésienne de la hauteur (Hc) issue de C dans le triangle ABC est donc $7x + y - 37 = 0$
On remarquera que cette méthode est beaucoup plus rapide que celle utilisée au paragraphe 13.6.3 .

13.9.3 Equation réduite de droite, vecteur directeur et vecteur normal

Un *vecteur normal* à une droite est un vecteur dont la direction est perpendiculaire à celle de la droite.
Soit (δ) la droite d'équation réduite $y = mx + p$.

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (δ) , $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-m\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite (δ) .

Le lecteur vérifiera que le critère d'orthogonalité est vérifié avec les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$.

Equation réduite de deux droites perpendiculaires : deux droites d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont perpendiculaires si et seulement si $m \times m' = -1$.

13.9.4 Equation cartésienne de droite et vecteur normal

Soit (Δ) la droite dont une équation cartésienne est $ax + by + c = 0$.

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ), $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un *vecteur normal* à la droite (Δ).

Le lecteur vérifiera que le critère d'orthogonalité est vérifié avec les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$.

13.9.5 Equation normale d'une droite

On se place dans un repère orthonormé direct et a, b et c sont des réels.

Définition : $ax + by + c = 0$ est une *équation normale de droite* lorsque $a^2 + b^2 = 1$. (a, b, c réels).

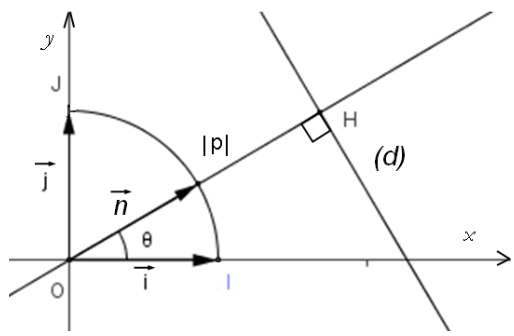
Propriété : pour toute droite du plan, il existe deux réels θ et p tels qu'une équation normale de la droite soit : $x \cos\theta + y \sin\theta = p$.

Interprétation géométrique :

Le vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ est de norme 1.

θ est la mesure de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{n}$.

H est le projeté orthogonal de O sur la droite (d),
|p| est la distance OH.



Pour transformer une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ en équation normale, il suffit de diviser les coefficients a, b et c par $\sqrt{a^2 + b^2}$, de transposer la constante et éventuellement de tout multiplier par le coefficient (–1) pour que la constante p soit positive et l'interpréter ainsi comme une distance sans utiliser la valeur absolue.

Remarque : une droite admet exactement deux équations normales :
$x \cos\theta + y \sin\theta = p$ et $x \cos(\theta + \pi) + y \sin(\theta + \pi) = -p$.
L'unité d'angle utilisée ici est le radian : π radians = 180°.

13.9.6 Equation d'un cercle

La distance qui sépare un point M du cercle (C) de son centre $\Omega\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ est égale à son rayon R.
L'équation du cercle (C) de centre Ω traduit le fait que $\Omega M^2 = R^2$.

(C) : $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ Voir 13.6.6 page 273.

Un autre manière d'écrire l'équation d'un cercle consiste à traduire le fait que si M est un point du cercle de diamètre [AB] différent de A et de B alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-x_B\\ y-y_B\end{pmatrix}$ d'où $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$ Voir 13.9.2. page 276.

Le lecteur vérifiera par le calcul qu'on peut passer d'une équation à l'autre, sur quelques exemples et dans le cas général.

On donne A(1 ;3) et B(7 ; – 5). Déterminer l'équation du cercle de diamètre [AB] de deux manières et l'écrire de deux manières différentes. Vérifier la cohérence des résultats.

Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) d'équation $x^2 + 3x + y^2 - 5y + 4 = 0$. Déterminer les coordonnées de deux points de (C) diamétralement opposés sur une droite parallèle à la première bissectrice. (Dans un repère orthonormé, la *première bissectrice* est la droite d'équation $y = x$)

13.9.7 Distance d'un point à une droite

Propriété : dans un repère orthonormé direct, si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de la droite (d) et $A(x_A ; y_A)$ un point du plan, la distance du point A à la droite (d) est AH, où H désigne le projeté orthogonal de A sur (d) et on a $AH = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Démonstration : Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit (d) la droite dont une équation cartésienne est $ax + by + c = 0$. On note $\overrightarrow{n}\,(a ; b)$ un vecteur dont la direction est orthogonale à celle de la droite (d). Soit $A(x_A ; y_A)$ un point du plan. On considère le point H , pied de la perpendiculaire à (d) passant par A.
Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires, il existe donc un nombre k tel que $\overrightarrow{AH} = k\,\overrightarrow{n}$.

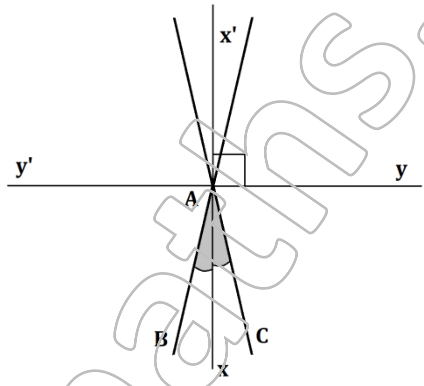
Par hypothèse $\overrightarrow{n}\,(a ; b)$ donc $\overrightarrow{AH}\,(ka ; kb)$ or $\overrightarrow{AH}\,(x_H - x_A ; y_H - y_A)$
donc $x_H - x_A = ka$ et $y_H - y_A = kb$ d'où les coordonnées du point $H(x_A + ka ; y_A + kb)$.
Or le point H appartient à la droite (d) donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d).

$$a(x_A + ka) + b(y_A + kb) + c = 0 \iff a\,x_A + ka^2 + b\,y_A + kb^2 + c = 0 \iff a\,x_A + b\,y_A + c + k(a^2+b^2) = 0$$

$$\text{d'où } |k| = \frac{|ax_A + by_A + c|}{a^2+b^2} \text{ or } \|\overrightarrow{n}\| = \sqrt{a^2+b^2} \text{ donc } AH = |k|\sqrt{a^2+b^2} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

13.9.8 Equations des bissectrices d’un angle

On appelle *bissectrice intérieure* de l’angle $\widehat{BAC}$ la droite (xx’) qui partage l’angle $\widehat{BAC}$ en deux angles de même mesure. La droite (yy’), perpendiculaire en A à (xx’) est la *bissectrice extérieure* de l’angle $\widehat{BAC}$. Ces deux droites sont les lieux géométriques des points équidistants des droites (AB) et (AC).



Voyons sur un exemple comment déterminer les équations cartésiennes des bissectrices d’un angle.

Soit A(0 ; 3), B(4 ; 0) et $C\left(\frac{5}{4}; 0\right)$.

On commence par déterminer les équations cartésiennes des droites (AB) et (AC).

(AB) : 3x + 4y – 12 = 0 et (AC) : 12x + 5y – 15 = 0.

Les distances d’un point M(x ; y) quelconque à ces droites sont d et d’ avec :

$$d = \frac{|3x + 4y - 12|}{5} \quad \text{et} \quad d' = \frac{|12x + 5y - 15|}{13}.$$

Le point M appartient à l’une ou l’autre des deux bissectrices de l’angle $\widehat{BAC}$ si et seulement si *d* = *d’*, ce qui conduit à l’une ou l’autre des équations suivantes :

$$\frac{3x + 4y - 12}{5} = \frac{12x + 5y - 15}{13} \quad \text{ou} \quad \frac{3x + 4y - 12}{5} = -\frac{12x + 5y - 15}{13}$$

Il en découle, après calculs, les équations cartésiennes de deux droites :

(Δ) : 7x – 9y + 27 = 0 et (Δ’) : 9x + 7y – 21 = 0.

Le lecteur vérifiera qu’elles se coupent perpendiculairement en A et que la droite (Δ’) coupe l’axe des abscisses entre les points B et C.

En conséquence, la droite (Δ’) est la bissectrice intérieure de l’angle $\widehat{BAC}$ et (Δ) est sa bissectrice extérieure.